

I. 以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) 5 個の値

25, 13, 19, c , 31

からなるデータの平均値が $c+4$ である。このとき、 $c = \boxed{(1)} \boxed{(2)}$ であり、データの分散は $\boxed{(3)} \boxed{(4)}$ である。

(ii) 空間に 2 点 A, B があり、その 2 点間の距離は 1 である。点 A を中心とする半径 3 の球を、点 B を含む平面で切断してできる円の半径の最大値は $\boxed{(5)}$ 、最小値は $\boxed{(6)}\sqrt{\boxed{(7)}}$ である。

(iii) 不等式 $\log_2 x \leq y \leq 9$ を満たす正の整数の組 (x, y) は $\boxed{(8)} \boxed{(9)} \boxed{(10)} \boxed{(11)}$ 組存在する。

(iv) 関数 $f(\theta) = \left| \int_0^1 (x + \sin \theta) dx \right|$ を $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えるとき、 $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\boxed{(12)} \boxed{(13)}}{\boxed{(14)}}\pi$ のとき最小値 $\boxed{(15)}$ を、 $\theta = \frac{\boxed{(16)}}{\boxed{(17)}}\pi$ のとき最大値 $\frac{\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}}$ をとる。

(v) a を正の定数とする。 xy 平面上の 4 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ を頂点とする正方形を、放物線 $y = ax^2$ によって 2 つの図形に分ける。このとき、2 つの図形の面積が等しくなるような定数 a の値は $\frac{\boxed{(20)} \boxed{(21)}}{\boxed{(22)}}$ である。

II. xy 平面上の2曲線

$$y = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad \text{と} \quad y = -\frac{1}{x} \quad (x < 0)$$

をそれぞれ C_1, C_2 とする。O を原点、P を曲線 C_1 上の点とすると、曲線 C_2 上の点 Q を、 $OP \perp OQ$ となるように定める。このとき、以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

ただし (エ) と (オ) については、底を素数、指数を有理数で表した数の積として、できるだけ簡単な形で答えなさい。たとえば、 $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ と解答する場合には $2 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 7$ と答えなさい。

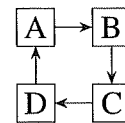
(i) 以下、P の x 座標を a とする。このとき、 a を用いて $\triangle OPQ$ の面積を表すと $\boxed{\text{(ア)}}$ である。また、線分 PQ の中点と O を通る直線を ℓ とする。PQ と x 軸が平行でないとき、 a を用いて ℓ の傾きを表すと $\boxed{\text{(イ)}}$ である。

(ii) $a > 1$ のとき、 ℓ と C_1 との交点を R とする。 a を用いて R の x 座標を表すと $\boxed{\text{(ウ)}}$ である。また、OP と x 軸がなす角が 15° のとき、R の x 座標は $\boxed{\text{(エ)}}$ である。

(iii) k を定数とする。放物線 $y = -x^2 + k$ と C_1 の共有点が1個になるとき、 k の値は $\boxed{\text{(オ)}}$ である。

III. 太郎と花子は、右図のように配置された

A, B, C, D の 4 マスを矢印の向きに進むゲームを行う。
ルールは次で与えられる。



- (a) 太郎は A を出発し、花子は B を出発する。
- (b) 太郎は赤いサイコロ、花子は青いサイコロを振り、それぞれの出た目に応じて、1 か 2 の目が出たら 1 マス、3 か 4 の目が出たら 2 マス、5 か 6 の目が出たら 3 マス進む。移動が終わった時点での太郎と花子の位置を、それぞれの 1 回目の位置とよぶ。
- (c) 自然数 n に対し、太郎と花子はそれぞれの n 回目の位置から出発し、(b) と同じ手順で移動する。移動が終わった時点での太郎と花子の位置を、それぞれの $n+1$ 回目の位置とよぶ。

このとき、以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

- (i) 太郎と花子の 1 回目の位置が同じである確率は $\frac{\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}}$ である。また、
太郎と花子の 2 回目の位置が同じである確率は $\frac{\boxed{(25)} \quad \boxed{(26)}}{\boxed{(27)} \quad \boxed{(28)}}$ である。

- (ii) 太郎と花子の n 回目の位置が同じである確率を p_n とするとき、

$$p_{n+1} = \frac{\boxed{(29)}}{\boxed{(30)}} p_n + \frac{\boxed{(31)}}{\boxed{(32)}}$$

が成り立ち、

$$p_n = \frac{\boxed{(33)}}{\boxed{(34)}} \left\{ 1 - \left(\frac{\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}} \right)^n \right\}$$

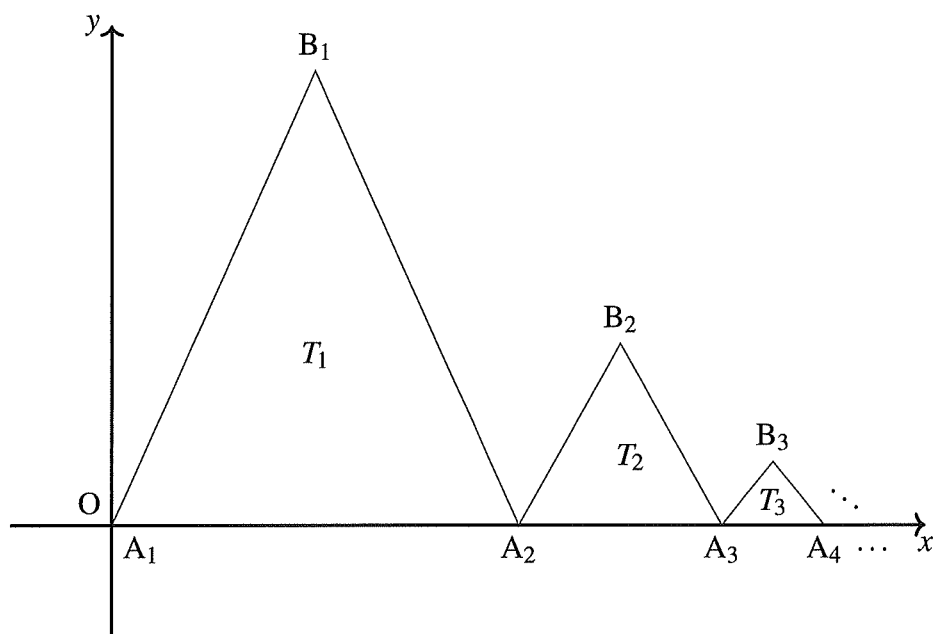
と表せる。

IV. 下図のように、 xy 平面上に三角形 T_1, T_2, T_3, \dots が以下の規則1, 規則2で並べられている。

(規則1) T_1 は3点 $A_1(0,0), B_1(\frac{1}{2}, 1), A_2(1,0)$ を頂点とする三角形である。

(規則2) 2以上の自然数 n について、 T_n は3点 A_n, B_n, A_{n+1} を頂点とし、次の5つの条件を満たす三角形である。

- (a) 点 A_n と点 A_{n+1} は x 軸上に、点 B_n は第1象限に存在する。
- (b) 点 A_{n+1} の x 座標は点 A_n の x 座標より大きい。
- (c) $A_n B_n$ の長さと $B_n A_{n+1}$ の長さは等しい。
- (d) $A_n A_{n+1}$ の長さは $A_{n-1} A_n$ の長さの $\frac{1}{2}$ 倍である。
- (e) T_n の面積は T_{n-1} の面積の $\frac{1}{8}$ 倍である。



以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) $\cos \angle B_2 A_2 A_3 = \frac{\sqrt{\frac{(37)}{(38)}}}{(38)}$ であり, $\cos \angle B_1 A_2 B_2 = \frac{\sqrt{\frac{(39)}{(41)} \cdot \frac{(40)}{(42)}}}{(41)} \cdot \frac{(40)}{(42)}$ である。

(ii) 自然数 n に対し, 点 A_n の座標は

$$\left(\frac{(43)}{(44)} - \left(\frac{(44)}{(45)} \right)^{n-1} \cdot \frac{(46)}{(45)}, 0 \right)$$

である。

(iii) 自然数 n に対し, 点 B_n の座標は

$$\left(\frac{(47)}{(48)} - \frac{(48)}{(49)} \left(\frac{(50)}{(51)} \right)^{n-1}, \left(\frac{(52)}{(53)} \right)^{n-1} \right)$$

である。

(iv) 点 B_1, B_2, B_3, \dots は同一の放物線上にある。この放物線の方程式は

$$y = \frac{(54)}{(55)} x^2 - \frac{(56)}{(58)} x + \frac{(59)}{(61)}$$

である。